Adı-Soyadı: **06.04.2018**

Numarası : **Matematik Bölümü Dif. Denk.II Arasınav Soruları**

1) $y''' - y' = e^{-x} + 2e^{x}$ **2)** $y'' - y' - 2y = 1 - 2\sin x$

3) $y'' + y = 3 - x^2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ **4)** $4y'' - 4y' + y = \sqrt{2xe^{x}}$

5) $x(1-2\ln x)y'' + (1+2\ln x)y' - \frac{4}{x}y = 0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = x^2$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

6) $Ly = 0$ değişken katsayılı n inci mertebeden homojen lineer diferansiyel denkleminin $y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0,\ y''(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$ şartını sağlayan çözümünün ancak ve ancak $y(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

NOT: Sadece dört soru seçerek cevaplandırınız.

*) $y(x) = c_1 \ln c_2 x - \ln c_3 x^{c_4} + c_5 \cosh(\ln x) + \ln c_6 x^{1+c_7} + c_8 x + \frac{c_9}{x} - 7\ln\frac{3}{\sqrt{2x}} + 2x - \frac{5}{x} + 1$ ifadesi kaçıncı mertebeden homojen olan veya olmayan denklemin genel çözümüdür?

Başarılar. N.A.

1) $y''' - y' = 0 \Rightarrow \lambda^3 - \lambda = 0 \quad \lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$

$u(x) = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}$, $v(x) = \frac{1}{D^3 - D} e^{-x} + \frac{1}{D^3 - D} 2e^{x} = \frac{1}{D(D-1)(D+1)} e^{-x}$

$+ \frac{1}{D(D-1)(D+1)} 2e^{x} = \frac{1}{-1(-1-1)(D+1)} e^{-x} + \frac{1}{1(D-1)(1+1)} 2e^{x} = \frac{1}{2}\frac{1}{D+1} e^{-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{D-1}\cancel{2e}\,2e^{x}$

$= \frac{1}{2} e^{-x} \frac{1}{D-1+1}\cdot 1 + e^{x}\frac{1}{D+1-1}\cdot 1 = \frac{1}{2} e^{-x} x + e^{x} x$ olur.

$y(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow y(x) = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} x + e^{x} x$

2) $y'' - y' - 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -1$

$u(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$, $v(x) = \frac{1}{D^2 - D - 2}(1 - 2\sin x) = \frac{1}{D^2 - D - 2}\cdot 1 - 2\frac{1}{D^2 - D - 2}\sin x$

$= \frac{1}{0 - 0 - 2} 1\cdot e^{0\cdot x} - 2\frac{1}{-1^2 - D - 2}\sin x = -\frac{1}{2} + 2\frac{1}{D+3}\sin x = -\frac{1}{2} + 2\frac{D-3}{D^2 - 9}\sin x$

$= -\frac{1}{2} + 2\frac{D-3}{-1^2 - 9}\sin x = -\frac{1}{2} - \frac{2}{10}(\cos x - 3\sin x)$, $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{5}(\cos x - 3\sin x)$

3) $y'' + y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \quad u(x) = c_1\cos x + c_2\sin x \quad v(x) = \frac{1}{D^2 + 1}(3 - x^2)$

$= (1 - D^2 + D^4 - \ldots)(3 - x^2) = 3 - x^2 + 2 \quad y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + 5 - x^2$

$y(0) = 0 \quad c_1 + 5 = 0 \quad c_1 = -5 \quad y'(0) = 0 \quad y' = -c_1\sin x + c_2\cos x - 2x$

$y'(0) = 0 \quad 0 = c_2 \Rightarrow c_2 = 0 \quad y(x) = \cancel{-3\cos x + 2\sin x + 3 - x^2 - 2x}$ olur

$= -5\cos x + 5 - x^2$

4) $4y'' - 4y' + y = \sqrt{2xe^x}$

$4y'' - 4y' + y = 0 \Rightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0$

$\lambda_1 = 1/2$ ikitane homojenin genel çözümü $u(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{\frac{1}{2}x}$

Homojen olmayan denk. bir özel çözümü

$$V(x) = \frac{1}{(2D-1)^2}\sqrt{2xe^x} = \frac{1}{(2D-1)^2}\sqrt{2}\sqrt{x}\,e^{\frac{1}{2}x} = \sqrt{2}\,e^{\frac{1}{2}x}\frac{1}{(2(D+\frac{1}{2})-1)^2}\sqrt{x}$$

$$= \sqrt{2}e^{\frac{1}{2}x}\frac{1}{D^2}\sqrt{x} = \sqrt{2}\,e^{\frac{1}{2}x}\frac{1}{D}\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} = \sqrt{2}e^{\frac{1}{2}x}\frac{x^{3/2+1}}{(3/2+1)\,3/2}$$

Genel çözüm $y(x) = u(x) + v(x)$

$$y(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{\frac{1}{2}x} + \frac{4\sqrt{2}}{15}x^{5/2}e^{\frac{1}{2}x}$$

— o — o —

5) $x(1-2\ln x)y'' + (1+2\ln x)y' - \frac{4}{x}y = 0$, bir özel çözüm

$y_1 = x^2$ Liouville formülünden

$$\begin{vmatrix} x^2 & y \\ 2x & y' \end{vmatrix} = c\, e^{-\int \frac{1+2\ln x}{x(1-2\ln x)}dx} \qquad x^2y' - 2xy = c\, e^{\ln(x(1-2\ln x))}$$

$$\frac{x^2y' - 2xy}{(x^2)^2} = c.\frac{x(1-2\ln x)}{(x^2)^2} \Rightarrow \left(\frac{y}{x^2}\right)' = c\left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^3}\ln x\right)$$

$$\frac{y}{x^2} = c\left(\int \frac{1}{x^3}dx - \int \underbrace{(\ln x)}_{u}\,\underbrace{\frac{2}{x^3}dx}_{dv}\right) + c_1 \qquad du = \frac{1}{x}dx \quad V = \int \frac{2}{x^3}dx = -\frac{1}{x^2}$$

$$= c\left(\int \frac{1}{x^3}dx - \left(-\frac{1}{x^2}\ln x - \int -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}dx\right)\right) + c_1$$

$$= c\left(\cancel{\int \frac{1}{x^3}dx} + \frac{1}{x^2}\ln x - \cancel{\int \frac{1}{x^3}dx}\right) + c_1$$

$\boxed{y = c\ln x + c_1 x^2}$ olur.

6) $Ly=0$ denkleminin $y(x_0)=0, y'(x_0)=0, \dots, y^{(n-1)}(x_0)=0$ şartını sağlayan çözümü $\iff$ $y(x)=0$ dır.

ispat $(\Leftarrow)$ $y(x)=0$ hem $Ly=0$ ve hem de başlangıç şartını sağladığından çözümdür.

$(\Rightarrow)$ $Ly=0$ denk bu başlangıç şartını sağlayan çözümünün $y(x)=0$ old. göst.

Teoreme göre $Ly=0$ denkleminin $y_1(x), \dots, y_n(x)$ gibi n-tane lineer bağımsız çözümü var ve genel çözümün $y(x)=c_1 y_1(x)+\cdots+c_n y_n(x)$ old. biliniyor. Bunun başlangıç şartını sağlatırsak,

$$\left.\begin{aligned} y(x_0) &= c_1 y_1(x_0)+\cdots+c_n y_n(x_0)=0 \\ y'(x_0) &= c_1 y_1'(x_0)+\cdots+c_n y_n'(x_0)=0 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= c_1 y_1^{(n-1)}(x_0)+\cdots+c_n y_n^{(n-1)}(x_0)=0 \end{aligned}\right\}$$

olur. Bu homojen lineer denklem sist. matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

olur. Katsayılar mat. determinantı $y_1(x), \dots, y_n(x)$ lineer bağımsız old. dan sıfırdan farklıdır. O halde Cramer yöntemi ile çözüm bulunursa $c_1=0, c_2=0, \dots, c_n=0$ bulunur. Yani başlangıç şartını sağlayan çözümü $y(x)=0$ olur.

—o—

*) $y(x) = c_1 \ln c_2 x - \ln c_3 x^{c_4} + c_5 \cosh(\ln x) + \ln c_6 x^{1+c_7}$

$+ c_8 x + \dfrac{c_9}{x} - 7 \ln \dfrac{3}{\sqrt{2x}} + 2x - \dfrac{5}{x} + 1$

$$y(x) = c_1 \ln c_2 + c_1 \ln x - \ln c_3 - c_4 \ln x + c_5 \frac{\underbrace{e^{\ln x}}_{=x} + \underbrace{e^{-\ln x}}_{=\frac{1}{x}}}{2}$$

$$+ \ln c_6 + (1+c_7)\ln x + \boxed{c_8 x} + \frac{c_9}{x} - 7 \ln 3 + 7 \ln \sqrt{2} + \frac{7}{2} \ln x$$

$$+ \boxed{2x} - \frac{5}{x} + 1$$

$$= c_1 \ln c_2 - \ln c_3 + \ln c_6 - 7 \ln 3 + 7 \ln \sqrt{2} + 1$$

$$+ \left(c_1 - c_4 + 1 + c_7 + \frac{7}{2}\right) \ln x + \left(\frac{c_5}{2} + c_8 + 2\right) x$$

$$+ \left(\frac{c_5}{2} + c_9 - 5\right) \frac{1}{x}$$

$$= c_{10} + c_{11} \ln x + c_{12} x + c_{13} \frac{1}{x}$$

4. mertebeden homojen olan bir dif. denk. genel çözümü olabilir.